## EXERCICE 33

$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e \cdot \frac{1}{\frac{e^x}{\sqrt{x}}} = 0$ ($\frac{e^x}{\sqrt{x}} \to +\infty$)

$y = 0$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisige de $(+\infty)$

2) a) la fction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

la fonction : $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\Longrightarrow x \mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

d'où la fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{1-x} - \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$

$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{1-x} \quad \forall x \in ]0,+\infty[$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}\, e^{1-x}}{x}$

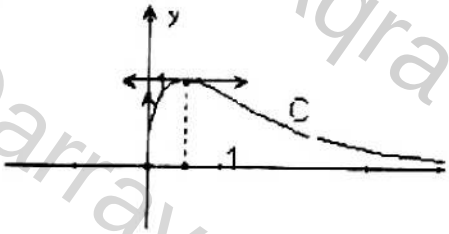
$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$

$(\mathcal{C})$ admet une demie-tangente verticale au point d'abscisse 0

3)

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\sqrt{\frac{e}{2}}$ | ↘ | 0 |

4)




$f(1) = 1$

5) $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0$

Soit $g(x) = f(x) - 1$

$g'(x) = f'(x)$

g est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$

$g(0) \times g(\frac{1}{2}) = 1 - \sqrt{\frac{e}{2}} < 0$ d'ou l'équation

$g(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ dans $]0,\frac{1}{2}[$

comme g est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ alors $\alpha$ est unique

* g est continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2},+\infty[$

$g(]\frac{1}{2},+\infty[) = ]-1,\sqrt{\frac{e}{2}} - 1[$

comme $0 \in ]-1,\sqrt{\frac{e}{2}} - 1[$ alors il existe un unique réel $\beta \in ]\frac{1}{2},+\infty[$ tel que $g(\beta)$

**conclusion**

$\alpha$ et $\beta$ sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[0,+\infty[$

* calculatrice $\Rightarrow 0.2 < \alpha < 0,21$

## EXERCICE 34

**Partie A**

$g(x) = 2e^x - x - 2$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - x - 2) = +\infty$

2) $g'(x) = 2e^x - 1$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\text{Ln}2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-Ln2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1 + Ln2$ | ↗ | $+\infty$ |

g est continue et strictemnt décte sur $]-\infty,-Ln2]$ elle réalise donc une bijection de $]-\infty,-Ln2]$ sur $[-1 + Ln2\ ,+\infty[$

Comme $0 \in [-1 + Ln2\ ,+\infty[$ alors il existe un unique réel $\alpha \in ]-\infty,-Ln2]$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$

$\Longrightarrow (-1,6) < \alpha < (-1,5)$

sur $[-1 + Ln2\ ,+\infty[$ $g(0) = 0$

g est strictement croissante sur $]-Ln2,+\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet 0 comme unique solution dans $]-Ln2,+\infty[$

**Conclusion** l'équation $g(x) = 0$ admet 0 et $\alpha$ comme uniques solutions dans IR

Qarray.tn -Aqra Blech Qarray.tn